Texto de apoio à disciplina Pré-Cálculo

Profa. Maria Lúcia Campos

Profa. Marlene Dieguez

FUNÇÃO QUADRÁTICA

A função $f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0, \ x \in \mathbb{R}$ é chamada de FUNÇÃO QUADRÁTICA.

O GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Vamos ver que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola. Vamos estudar o "método de completar o quadrado" para obter o gráfico de função quadrática. Esse método é aplicável em qualquer tipo de parábola, tendo interseção com o eixo x ou não tendo interseção com o eixo x.

Sabemos da Geometria Analítica que a equação $y = ax^2$ representa uma parábola com vértice na origem e eixo de simetria coincidente com o eixo y.

Além disso,

- quando $a > 0$, sabemos que a concavidade da parábola é voltada para cima.
- Quando $a < 0$, sabemos que a concavidade da parábola é voltada para baixo.

Podemos completar o quadrado na expressão $ax^2 + bx + c$ da equação $y = ax^2 + bx + c$ e encontrar valores para h e k de forma a reescrever a expressão, $ax^2 + bx + c = a(x - h)^2 + k$.

Assim, $y = ax^2 + bx + c$ equivale a $y = a(x - h)^2 + k$, que por sua vez equivale a $y - k = a(x - h)^2$.

A equação acima é chamada de *forma canônica da equação de uma parábola*. Essa parábola é uma translação da parábola de equação $y = ax^2$, ou seja, é uma parábola cujo vértice é $V(h, k)$ e, além disso, a concavidade é para cima quando $a > 0$ e para baixo quando $a < 0$.

Por analogia, $f(x) = a(x - h)^2 + k$ é chamada de *forma canônica da função quadrática* $f(x) = ax^2 + bx + c$ e o gráfico da função quadrática é uma parábola de vértice $V(h, k)$, e, além disso, a concavidade é para cima quando $a > 0$ e para baixo quando $a < 0$.

Exemplos:

1. Queremos esboçar o gráfico da função $f(x) = 4x^2 + 40x + 90$.

Vamos identificar a parábola de equação $y = 4x^2 + 40x + 90$.

Completando o quadrado dessa expressão:

$$y = 4x^2 + 40x + 90 = 4\left(x^2 + 10x\right) + 90 = 4\left(x^2 + 2\times 5\cdot x\right) + 90 = 4\left(x^2 + 2\times 5\cdot x + 25 - 25\right) + 90 =$$

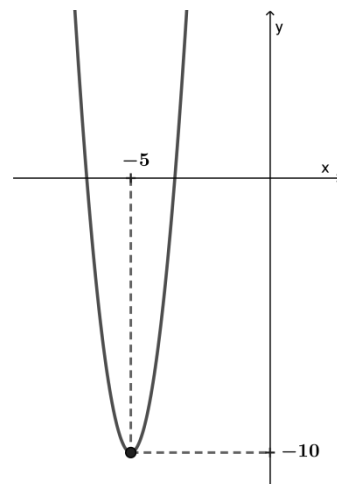
$$= 4\left(x^2 + 2\times 5\cdot x + 25\right) - 4\cdot 25 + 90 = 4(x+5)^2 - 100 + 90 = 4(x+5)^2 - 10\ .$$

Assim,

$$y = 4x^2 + 40x + 90 \iff y = 4(x+5)^2 - 10 \iff y - (-10) = 4(x+5)^2$$

Essa equação representa uma parábola de vértice $V(-5,-10)$, com concavidade voltada para cima.

A parábola que representa o gráfico da função $f(x) = 4x^2 + 40x + 90$ está desenhada na figura ao lado.

---

2. Queremos esboçar o gráfico da função $g(x) = -x^2 - 3x + \frac{27}{4}$.

Vamos identificar a parábola de equação $y = -x^2 - 3x + \frac{27}{4}$.

Completando o quadrado dessa expressão:

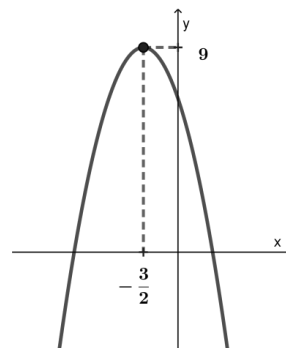
$$y = -x^2 - 3x + \tfrac{27}{4} = -\left(x^2 + 3x\right) + \tfrac{27}{4} = -\left(x^2 + 2\times\tfrac{3}{2}x\right) + \tfrac{27}{4} = -\left(x^2 + 2\times\tfrac{3}{2}x + \tfrac{9}{4} - \tfrac{9}{4}\right) + \tfrac{27}{4} =$$

$$= -\left(x^2 + 2\times\tfrac{3}{2}x + \tfrac{9}{4}\right) - \left(-\tfrac{9}{4}\right) + \tfrac{27}{4} = -\left(x + \tfrac{3}{2}\right)^2 + \tfrac{36}{4} = -\left(x + \tfrac{3}{2}\right)^2 + 9 = 9 - \left(x + \tfrac{3}{2}\right)^2.$$

Assim,

$$y = -x^2 - 3x + \tfrac{27}{4} \iff y = -\left(x + \tfrac{3}{2}\right)^2 + 9 \iff y - 9 = -\left(x + \tfrac{3}{2}\right)^2.$$

Essa equação representa uma parábola de vértice $V\left(-\frac{3}{2}, 9\right)$ e como $a = -1$, a parábola tem concavidade voltada para baixo.

A parábola que representa o gráfico da função $g(x) = -x^2 - 3x + \frac{27}{4}$ está desenhada na figura ao lado.

O TRINÔMIO DE SEGUNDO GRAU

Daqui em diante o objetivo será justificar os principais resultados do trinômio do segundo grau, tão conhecidos. Para deduzir esses resultados será aplicado o “método de completar o quadrado”. Atenção, não será cobrado em nenhuma avaliação ou atividade de Pré-Cálculo as deduções a seguir. O importante é o aluno conhecer os principais resultados.

DEDUÇÃO DAS SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE SEGUNDO GRAU

As soluções da equação: $ax^2+bx+c=0$, a,b,c constantes reais, $a\neq 0$, $x\in \mathbb{R}$.

De acordo com o que foi visto anteriormente, ao completar o quadrado no trinômio de grau 2 ax^2+bx+c, $a\neq 0$, obtemos:

$$ax^2+bx+c=0 \quad\Leftrightarrow\quad a\left(x+\tfrac{b}{2a}\right)^2-\tfrac{b^2-4ac}{4a}=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$a\left(x+\tfrac{b}{2a}\right)^2=\tfrac{b^2-4ac}{4a} \quad\Leftrightarrow\quad \left(x+\tfrac{b}{2a}\right)^2=\tfrac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Para que essa equação tenha solução é preciso que $\frac{b^2-4ac}{4a^2}\geq 0$, porque sabemos que $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geq 0$.

Mas, como $4a^2>0$, para que essa equação tenha solução é preciso que $\Delta=b^2-4ac\geq 0$.

Quando há solução, temos dois casos a considerar: $\Delta=b^2-4ac=0$ ou $\Delta=b^2-4ac>0$.

- Quando $\Delta=b^2-4ac=0$, resolvendo a equação, temos que:

$$\left(x+\tfrac{b}{2a}\right)^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad x+\tfrac{b}{2a}=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=-\tfrac{b}{2a}.$$

- Quando $\Delta=b^2-4ac>0$, resolvendo a equação, temos que:

$$\left(x+\tfrac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \quad\Leftrightarrow$$

$$x+\tfrac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \quad\Leftrightarrow$$

$$x+\tfrac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}} \quad\Leftrightarrow$$

$$x+\tfrac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2\sqrt{a^2}} \quad\Leftrightarrow$$

$$x+\tfrac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|}$$

Quando $a>0$, $\quad x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad\Leftrightarrow\quad x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Quando $a<0$, $\quad x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{-2a} \quad\Leftrightarrow\quad x=-\frac{b}{2a}\mp\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Resumindo,

- Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ então a equação $ax^2 + bx + c = 0$ **não tem solução**.
- Se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ então a equação $ax^2 + bx + c = 0$ **tem uma única solução**: $x = -\frac{b}{2a}$.
- Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ então a equação $ax^2 + bx + c = 0$ **tem duas soluções**: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Observação:

Quando $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, temos que $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b \pm 0}{2a} = \frac{-b}{2a}$, e assim a equação $ax^2 + bx + c = 0$, tem duas soluções iguais.

Quando $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, temos que a equação $ax^2 + bx + c = 0$, tem duas soluções diferentes, que são: $x = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e $x = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Podemos dizer que a equação $ax^2 + bx + c = 0$ tem solução se e só se $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$.

DEDUÇÃO DA FATORAÇÃO DO TRINÔMIO DO SEGUNDO GRAU

- **Afirmação 1**:

Se x_1 e x_2 são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ então $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Vamos verificar que essa afirmação é de fato verdadeira.

Se x_1 e x_2 são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ então $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Substituindo esses valores de x_1 e x_2 em $a(x - x_1)(x - x_2)$, obtemos:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = a\left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \right) = a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \right)\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \right)^2 \right) =$$

$$a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} \right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} \right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} \right) = ax^2 + bx + c.$$

Observação:

Esta demonstração vale, ainda se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, quando temos $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$. Vale notar que se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, então $c = \frac{b^2}{4a}$.

- **Afirmação 2**:

Se a equação $ax^2+bx+c=0$ não possui solução, um dos dois casos é verdadeiro:

(i) $a>0$, e neste caso temos que $ax^2+bx+c>0$ para todo $x \in$ IR

ou

(ii) $a<0$ e neste caso temos que $ax^2+bx+c<0$ para todo $x \in$ IR.

Justificativa:

Ao completar o quadrado, vimos que $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$, ou seja,

$$ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\tfrac{b}{2a}\right)^2-\tfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right).$$

Vamos verificar que se a equação não possui solução, então $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}>0$ para todo $x \in$ IR.

Sabemos que:

- ✓ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, para todo $x \in$ IR.
- ✓ quando a equação não possui solução e $a \neq 0$, então $4a^2>0$ e $b^2-4ac<0$, donde $-\frac{b^2-4ac}{4a^2}>0$.

Logo, sendo $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ e $-\frac{b^2-4ac}{4a^2}>0$ então $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}>0$.

Como $ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$, concluímos que o sinal de ax^2+bx+c só depende do sinal de *a*.

Aplicação da Fatoração: ANÁLISE DO SINAL DO TRINÔMIO DO SEGUNDO GRAU

A análise de sinal de $E(x)=ax^2+bx+c$.

- Se a equação $E(x)=ax^2+bx+c$ **possui duas raízes distintas:**

Considerando que as raízes são x_1 e x_2, $x_1 \neq x_2$, podemos considerar, sem perda de generalidade que, $x_1<x_2$.

Pela afirmação 1 anterior, $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

Logo, quando $a>0$

	$-\infty<x<x_1$	$x=x_1$	$x_1<x<x_2$	$x=x_2$	$x_2<x<+\infty$
A	+	+	+	+	+
$x-x_1$	−	0	+	+	+
$x-x_2$	−	−	−	0	+
$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$	+	0	−	0	+

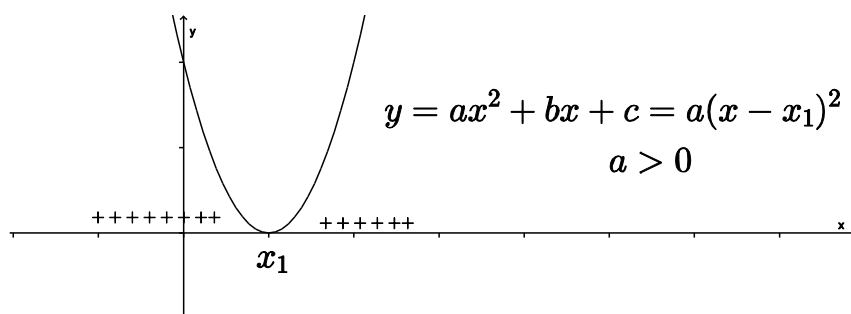
Logo, quando $a < 0$

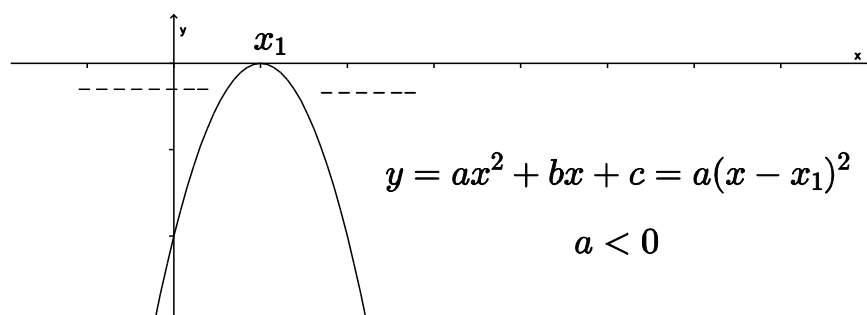
	$-\infty < x < x_1$	$x = x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x = x_2$	$x_2 < x < +\infty$
a	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$x - x_1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - x_2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$	$-$	0	$+$	0	$-$

- Se a equação $E(x) = ax^2 + bx + c$ **possui duas raízes iguais**, $x_1 = x_2$, pela afirmação 1 anterior, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x - x_1)^2$.

Logo,

- quando $a > 0$

	$-\infty < x < x_1$	$x = x_1$	$x_1 < x < \infty$
a	$+$	$+$	$+$
$(x - x_1)^2$	$+$	0	$+$
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$	$+$	0	$+$

- quando $a < 0$

	$-\infty < x < x_1$	$x = x_1$	$x_1 < x < \infty$
a	$-$	$-$	$-$
$(x - x_1)^2$	$+$	0	$+$
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$	$-$	0	$-$

- Se a equação $E(x) = ax^2 + bx + c$ não possui raízes reais, pela afirmação 2 da seção anterior, o sinal de $E(x) = ax^2 + bx + c$ só depende do sinal de *a*.

- quando $a > 0$

	$-\infty < x < \infty$
a	$+$
$ax^2 + bx + c$	$+$

- quando $a < 0$

	$-\infty < x < \infty$
a	$-$
$ax^2 + bx + c$	$-$